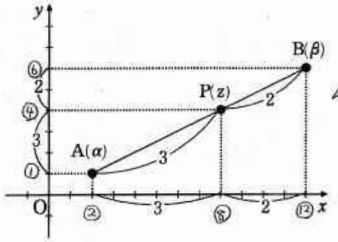
【説明】

課題①②で、教科書のP6~21までの学習が完了しています。この課題③では、P22~27までを学び、「複素数平面」の単元を終了することになります。今まで同様に、教科書の該当ページを参考に下記の練習問題に取り組みなさい。解答に自信のない時は、ワークの該当する問題を解いて答え合わせをしてから取り組むこと。

[1]線分の内分点・外分点（教科書P22）

次の図で、線分ABを3：2に「内分」する点P(z)を表す複素数を計算してみよう。



2点A(α)、B(β)を結ぶ線分ABを、$m:n$ に内分する点を表す複素数は $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

※ベクトルと同じ！

公式より、$z=\dfrac{2\alpha+3\beta}{3+2}$・・・①となる。

ここで、$\alpha=2+i$、$\beta=12+6i$ とすると、①式に代入して

$z=\dfrac{2(2+i)+3(12+6i)}{3+2}=\dfrac{4+2i+36+18i}{5}=\dfrac{40+20i}{5}=8+4i$ となる。

また、中点は、線分ABを1：1に内分する点のことなので、$m=1$、$n=1$ を代入して計算すればよい。

練習16　2点 A$(-1+i)$，B$(5-2i)$ を結ぶ線分 AB に対して，次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　2：1に内分する点

$\dfrac{1\cdot(-1+i)+2(5-2i)}{2+1}=\dfrac{-1+i+10-4i}{3}=\dfrac{9-3i}{3}=3-i$ //

(2)　1：4に外分する点

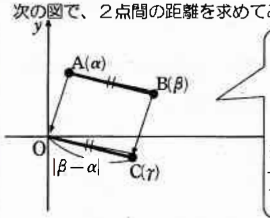
$\dfrac{-4(-1+i)+1\cdot(5-2i)}{1-4}=\dfrac{4-4i+5-2i}{-3}=\dfrac{9-6i}{-3}=-3+2i$ //

(3)　中点

$\dfrac{1\cdot(-1+i)+1\cdot(5-2i)}{1+1}=\dfrac{-1+i+5-2i}{2}=\dfrac{4-i}{2}=2-\dfrac{1}{2}i$ //

[2]2点間の距離（教科書P23）

次の図で、2点間の距離を求めてみよう。



2点A(α)、B(β)間の距離は
AB＝|β−α|

※ベクトルなら、線分ABを表すベクトル $\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ だった。つまり $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$

$\alpha=2+5i$、$\beta=5+4i$ としたとき、

まず、線分ABの長さを求めるために、点Aが原点Oに重なるように平行移動する。

⇒ $\beta-\alpha$ を計算すればいいので、$\beta-\alpha=(5+4i)-(2+5i)=3-i$

すると、線分ABは線分OCになる。※点B(β)を $-\alpha$ 分だけ移動したということ。

次に、線分OCの長さを求める。

⇒ $|\beta-\alpha|$ を計算すればいいので、$|\beta-\alpha|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

つまり、2点A(α)、B(β)間の距離は $\sqrt{10}$ である。

※この計算を一気にしているのが教科書の例11

練習17　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A$(1+i)$、B$(4-2i)$

$AB=|(4-1)+(-2-1)i|=|3-3i|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ //

(2)　A$(-3+2i)$、B$(1-i)$

$AB=|\{1-(-3)\}+\{(-1)-2\}i|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ //

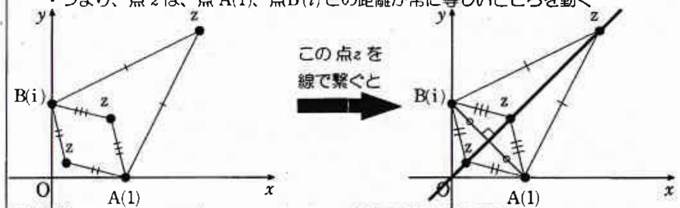
[3]複素数 z の表す図形（教科書P24）

2点A(α)、B(β)間の距離が $|\beta-\alpha|$ であることを用いて、次の点P(z)がどのような図形を描くかを考える。

① $|z-\alpha|=|z-\beta|$ 型　⇒　垂直二等分線を描く

複素数 z が、次の等式 $|z-1|=|z-i|$ を満たすとき、点 z はどのように動くか？

- $|z-1|$ とは、点 z と点A(1)との距離のことである。
- $|z-i|$ とは、点 z と点B(i)との距離のことである。
- つまり、点 z は、点 A(1)、点B(i) との距離が常に等しいところを動く



（解答）点 z が描く図形は、2点A(1)、B(i)を結ぶ線分ABの垂直二等分線である。

練習18　複素数平面上で次の等式を満たす点 z はどのような図形を描くか。

(1)　$|z+1|=|z-2i|$

$|z-(-1)|=|z-2i|$　必ず $|z-○|$ に変形する！（↑マイナス）　$|z+○|$ では、点zと点○の距離にはならない。

よって、点zが描く図形は、2点A(−1)、B(2i)を結ぶ線分ABの垂直二等分線である。//

(2)　$|z-2|=|z+3i|$

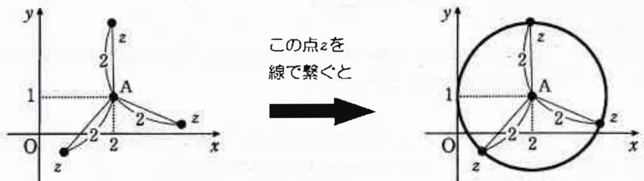
$|z-2|=|z-(-3i)|$

よって点zが描く図形は、2点A(2)、B(−3i)を結ぶ線分ABの垂直二等分線である。//

② $|z-\alpha|=r$ 型　⇒　円を描く

複素数 z が次の等式 $|z-(2+i)|=2$ を満たすとき、点 z はどのように動くか？

- 点 z から点A$(2+i)$ までの距離が、常に2であるということ。
- ある1点までの距離が常に等しい点は、円を描くことになる



（解答）点 z が描く図形は、点$(2+i)$を中心とする半径2の円である。

練習19　複素数平面上で次の等式を満たす点 z はどのような図形を描くか。

(1)　$|z|=2$　　　$|\underbrace{z-○}_{}|=r$　（○：中心、r：半径）

$|z-0|=2$

よって、点zが描く図形は、原点を中心とする、半径2の円である。//

(2)　$|z-(2+i)|=1$　（$2+i$：中心、1：半径）

点zが描く図形は、点2+iを中心とする、半径1の円である。//

(3)　$|z-1+3i|=4$

$|z-(1-3i)|=4$　（$1-3i$：中心、4：半径）　　$|z-○|=r$　←この部分をマイナスでくくる。

よって点zが描く図形は点1−3iを中心とする半径4の円である。//

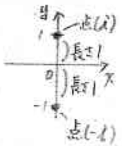
③ $|w-\alpha|=r$ 型への変形

点zは原点を中心とする半径1の円

複素数wとzで表された等式（$w=iz+2$ など）と、点 z の動き（条件）が与えられているとき、等式を $z=$ と書き換えて、条件を適用することで、点w の動きを調べることができる。

※例題４参照（注：$|i|$ とは、原点から点 i までの距離のことなので、$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$）

$\boxed{練習20}$ w、z は $w=3-iz$ を満たす複素数とする。点 z が原点 O を中心とする半径1 の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。



点zは $|z|=1$ …① を満たす

$w=3-iz$ より

$-iz=w-3$

$z=\dfrac{w-3}{-i}$

$|z|=\left|\dfrac{w-3}{-i}\right|=\dfrac{|w-3|}{|-i|}=|w-3|$ …②

①、②より

$|w-3|=1$

つまり点wが描く図形は

点3を中心とする半径1の円である//

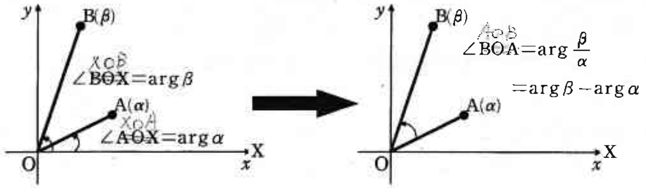
[４]図形への応用（教科書P26）

①２点の作る角度

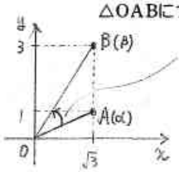
複素数 z は、極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$の形に書き換えることで x 軸とのなす角度を調べることができ、それをarg z と表した。

ある２点A(α)、B(β)がなす角 ∠~~BOA~~ (AOB) を調べるには、argβ(∠~~BOX~~ (XOB)) から argα(∠~~AOX~~ (XOA)) だけ引けばよいので、arg$\beta-$argαを求めることになる。

さらに、教科書P15より、arg$\beta-$arg$\alpha=$arg$\dfrac{\beta}{\alpha}$ であるので、つまり ∠~~BOA~~ (AOB) を調べるには $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を計算し、それを極形式に直せばいいことがわかる。



$\boxed{練習21}$ $\alpha=\sqrt{3}+i$、$\beta=\sqrt{3}+3i$ とする。3点 O(0)、A(α)、B(β)を頂点とする△OABについて、∠AOBの大きさを求めよ。



$\angle AOB=\arg\beta-\arg\alpha=\arg\dfrac{\beta}{\alpha}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{3-\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3i^2}{3-i^2}=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$

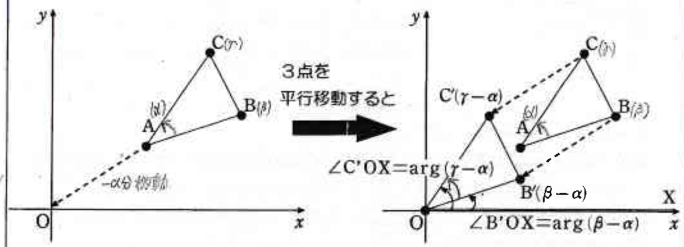
$=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ …この式変形,気づけるように!

よって, $\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{6}$ から, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$ //

②３点の作る角度

ある３点A(α)、B(β)、C(γ)のつくる角度∠BACを調べたいときは、知りたい角の頂点Aを原点Oへ平行移動し、同様に残りの２点B、Cも平行移動すれば、①の方法で角度を調べることができる。（∠BAC＝∠B'OC'として）

点Bを平行移動した点B'は、B'$(\beta-\alpha)$、点Cを平行移動した点C'は、C'$(\gamma-\alpha)$なので、∠BAC=∠B'OC'=arg$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ として求めることができる。



$\boxed{練習22}$ $\alpha=2-3i$、$\beta=4-2i$、$\gamma=3$とする。３点A(α)、B(β)、C(γ)を頂点とする△ABCについて、∠BACの大きさを求めよ。

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{3-(2-3i)}{(4-2i)-(2-3i)}=\dfrac{1+3i}{2+i}=\dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{2-i+6i-3i^2}{4-i^2}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって, $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$ から, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$ //

この問題、ベクトルだとどう解くのか？

(問) $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(4,-2)$, $\vec{c}=(3,0)$ とする。3点A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCについて, ∠BACの大きさを求めよ。

(解) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(4-2,-2-(-3))=(2,1)$

$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=(3-2,0-(-3))=(1,3)$

2つの方法で内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求める

内積の公式は2つあったはず 確認しておこう

(i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$=\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}\cdot\cos\angle BAC$

$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\angle BAC=5\sqrt{2}\cos\angle BAC$ —①

(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot1+1\cdot3=5$ —②

①、②より

$5\sqrt{2}\cos\angle BAC=5 \iff \cos\angle BAC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $0<\angle BAC<\pi$ より

$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$ //

③３点の作る三角形の形状

ある３点A(α)、B(β)、C(γ)のつくる△ABCについて、②の方法を用いると、角度を知ることができる。また、$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$を求めて極形式に変えることで、辺CA$(\gamma-\alpha)$とBA$(\beta-\alpha)$の長さの比を知ることができる。この２つの情報から、△ABCの形状を調べることができる。

知ることができる形状の例は、下記の通り。

(1) １つの角が$\dfrac{\pi}{3}$で、２つの辺の長さが等しい ⇒ 正三角形

(2) １つの角が$\dfrac{\pi}{3}$以外で、２つの辺の長さが等しい ⇒ 二等辺三角形

(3) １つの角が$\dfrac{\pi}{2}$で、すべての辺の長さが違う ⇒ 直角三角形

(4) １つの角が$\dfrac{\pi}{2}$で、２つの辺の長さが等しい ⇒ 直角二等辺三角形　　など

※解答の仕方は、ワークP13の43を参考にせよ。

$\boxed{練習23}$ 複素数α、β、γが等式 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ を満たすとき、３点A(α)、B(β)、C(γ)を頂点とする△ABCはどのような形をしているか。

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

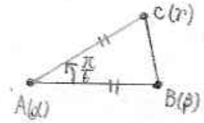
$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{6}$ から, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$ …①

また $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ より $|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

すなわち $AC=AB$ …②

①, ②より △ABCは $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$, $AC=AB$ の

二等辺三角形である。//



【終わりに】

- これで、「複素数平面」の学習は終わりです。
- より理解を深めたい場合は、教科書P28にある「練習問題Ａ・Ｂ」に取り組みましょう。解答は別途伝えます。
- 次は第２章をとばして、第３章「関数」に入ります。教科書に目を通し、予習しておくように。