数学Ⅲ　課題②

2020 年 4 月 24 日発行

すべてのページを重ねて、この表紙の左側の黒線部をホッチキスで留めて提出すること。

3年＿＿＿組＿＿＿番/名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【説明】

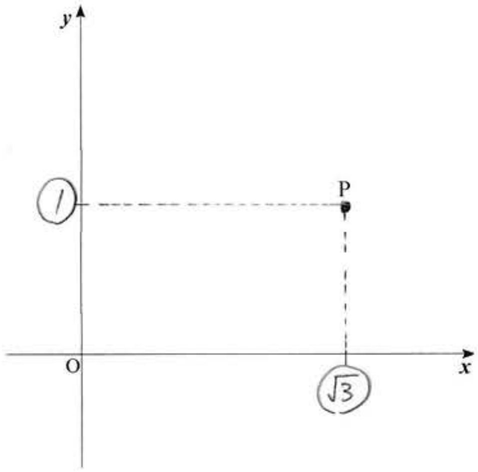
前回の課題①で、複素数を「平面上に表す」ということの基本を学びました。言い換えれば、複素数平面上のある点を、複素数として表すことができるようになりました。
この課題②では、複素数平面上の点の、もう一つの表し方と、それを使った便利な計算方法を学びます。
進め方は前回同様、数学Ⅲの教科書を参考にしてください。文中の下線部＿＿＿＿＿は、教科書を見て穴埋めしてください。範囲については、教科書の該当ページを表示しています。もし、答えに自信がない場合は、ワークの該当する問題を解いて答え合わせをしてから取り組むのもいいでしょう。

調べもの学習と書いてある部分に関しては、授業や教科書で取り扱っていないものもあるので、その場合は参考書やインターネットを利用してください。
もし、よくわからない点があれば、横江まで問い合わせてください。

[1]複素数の極形式（教科書 P12）

次の複素数平面上の点 P を、複素数 z として表すと、次のようになる。

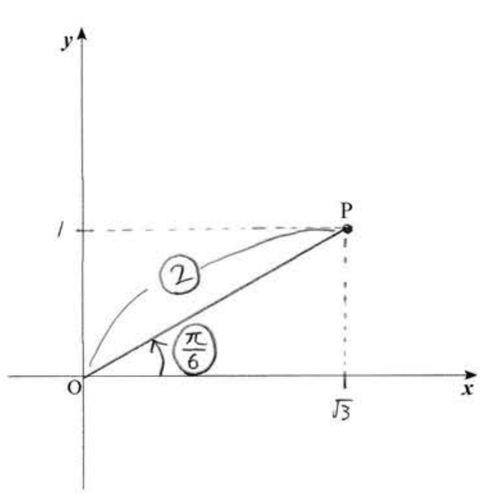
$$z=\sqrt{3}+i$$



これは、点 P の位置について、
①原点から左右にどれだけ移動しているか
②原点から上下にどれだけ移動しているか
この2つの情報で表している。

しかし、この点 P の位置を表す方法として、
①半直線 OP の長さ（ r とする）
②「半直線 OP 」と、「実軸（ x 軸）」とのなす角度（ θ とする）
この2点でも点 P の位置を次のように表すことができる。

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



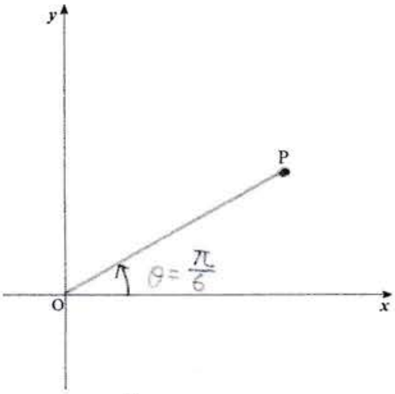
このように、ある複素数 z を、複素数平面上の点としたとき、 ①半直線 OP の長さ（r とする） ②「半直線 OP 」と、「実軸（x 軸）」とのなす角度（θ とする） の2つの情報で表したものを、複素数 z の

______________________________という。

また、このときの θ を複素数 z の____________ といい、____________で表す。

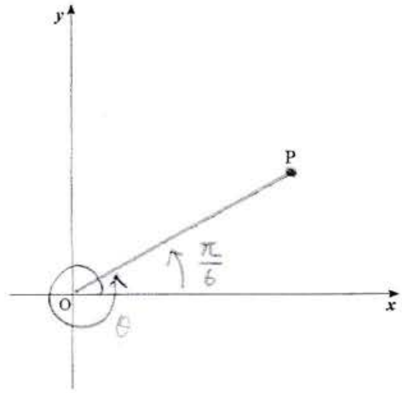
ここで、上の例で述べた ②「半直線 OP 」と、「実軸（x 軸）」とのなす角度（θ とする） について、この角度の表し方は実は複数ある。このことを思い出すために、以下に例を示す。

(1)



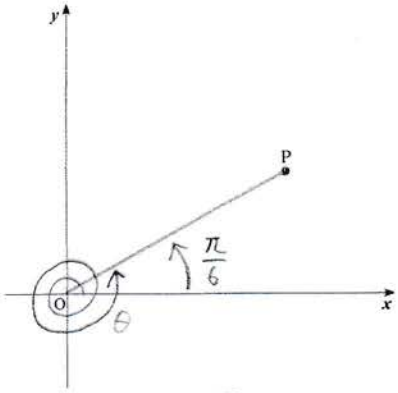
$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(2)



$\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$

(3)



$\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi \times 2 = \dfrac{\pi}{6} + 4\pi$

これらはすべて同じ点 P を表す情報である。つまり、θ の範囲が限定されていないとき、ある複素数 z の偏角は一般に次のように表される。（偏角の一つを θ_0 とすると）

$\arg z =$ ______________________（k は整数）

上の例で、θ の範囲が $0 \leqq \theta < 2\pi$ のように限定されているときは、$\arg z = \dfrac{\pi}{6}$

範囲が限定されていないときは、$\arg z = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ （k は整数） と表すことになる。

度数法、弧度法、三角比の関係について、次の表の空欄に正しく記入し復習せよ。

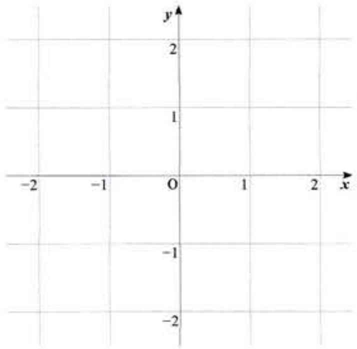
度数法(°)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法(ラジアン)	0								π
sin									
cos									
tan									

ここまでの準備を踏まえて、ある複素数を極形式で表す練習をしよう。教科書P13の例題1を参考に、次の問題を解け。

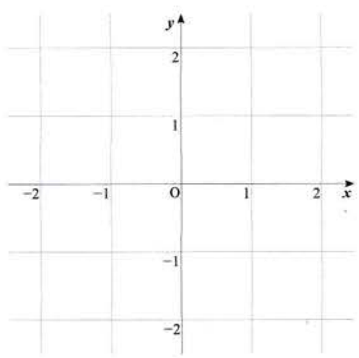
◆練習8(教科書P13)

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は(1)(2)では $0 \leqq \theta < 2\pi$ 、(3)(4)では $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。それぞれ、まずは複素数の表す点の位置を複素数平面上に書いてから解け。

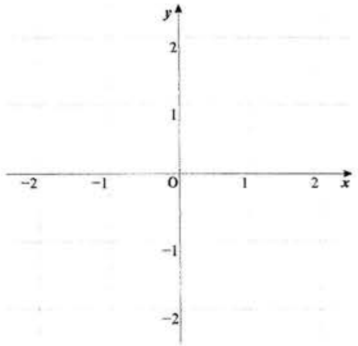
(1) $1+i$



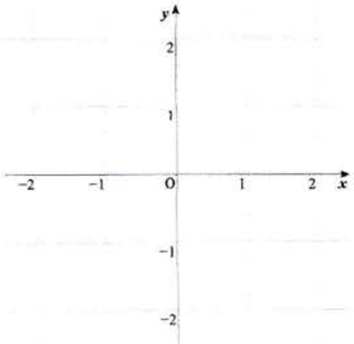
(2) -2



(3) $1-\sqrt{3}i$



(4) $-i$



[2]複素数の積と商

まずは復習として、以下の三角関数の加法定理4つを記入せよ。

①$\sin(\theta_1+\theta_2)=$ ________________

②$\cos(\theta_1+\theta_2)=$ ________________

③$\sin(\theta_1-\theta_2)=$ ________________

④$\cos(\theta_1-\theta_2)=$ ________________

例4を参考に、次の問題を解け。

◆練習9（教科書 P14）

次の複素数の積 $\alpha\beta$ を求めよ。

$\alpha=3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ 、 $\beta=4\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

次に、練習9のα、βは、極形式でない状態で表すと、

$$\alpha=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad 、\quad \beta=-2+2\sqrt{3}i$$

である。この状態で同じく積$\alpha\beta$を求めてみよう。計算の続きを記入せよ。

$$\alpha\beta=\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=$$

答えは同じになるはずだが、どちらの計算が楽なのかを自分なりに比較してみてください。

複素数の商の計算についても同様に、例5を参考に次の問題を解け。

◆練習10（教科書 P15）

次の複素数の商$\dfrac{\alpha}{\beta}$を求めよ。

$$\alpha=3\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \quad 、\quad \beta=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

こちらについても同様にα、βを、極形式でない状態で表すと、

$$\alpha=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i \quad 、\quad \beta=2+2\sqrt{3}i$$

である。この状態で商$\dfrac{\alpha}{\beta}$を求めてみよう。計算の続きを記入せよ。

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}{2+2\sqrt{3}i}=$$

[3]複素数の積と図形(教科書 P16)

複素数同士の掛け算(積)について、図形的な性質を考えていく。

ある複素数 z に、複素数 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を掛けるということは、

点 z を

①原点を中心に θ だけ回転

②原点からの距離を r 倍

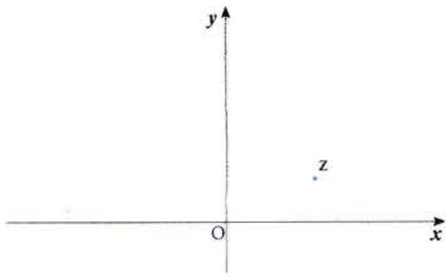
したもののことである。つまり、点 z の位置を、複素数 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の分だけ移動させることになる。

例6を参考に、次の問題を解け。

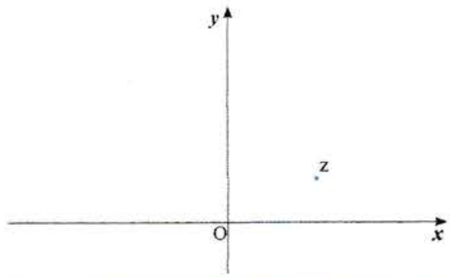
◆練習11(教科書 P16)

次の α について、点 αz は、点 z をどのように移動した点か。また、点 z と点 αz を例6を参考にして複素数平面上に示せ。

(1) $\alpha = 3i$



(2) $\alpha = 1 + i$



調べもの学習

ここで重要なのは、複素数を掛けると、点の位置は回転・伸縮する、ということである。このことは皆さんの身近なところで頻繁に利用されています。どのような技術に利用されているのかを調べてみよう。

例題2について、2通りの解き方を以下に示す。

【例題2】（教科書 P17）

$z=\sqrt{3}+i$ とする。点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

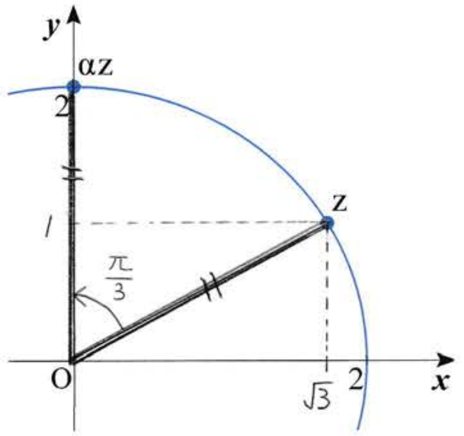
$\boxed{\text{解き方①}}$ $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる複素数を α とする方法

ある点を、原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる複素数を α とすると、

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であり、、これを計算すると　$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　である。

求める複素数は αz であるから、

$$\alpha z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i^2$$
$$=2i$$



$\boxed{\text{解き方②}}$ 複素数 z を極形式に直す方法

複素数 z を極形式に直すと、

$$z=\left(\sqrt{3}+i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

これを、原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を表す複素数は、

$$2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2(0+i)$$
$$=2i$$

このように、どちらの解き方でもちろん同じ答えにたどり着く。しかし、この問題ではなるべく解き方①（ある複素数を掛け算することで、点の位置を回転・伸縮する方法）を身に着けてほしい。（次ページ以降で解き方①の考えが使われるため）

◆練習14（教科書 P17）

$z=1+\sqrt{3}i$ とする。点 z を原点を中心に次の角度だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

※なるべく解き方①を使って解くこと。

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{2}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{2}$

(4) $-\frac{\pi}{4}$

[4]ド・モアブルの定理(教科書P18)

ある複素数 z について、これを何度も掛け合わせたもの z^2、 z^3、 z^4、 z^5 ・・・などを計算するときに便利なのが、このド・モアブルの定理である。

次の例では、ド・モアブルの定理を使った場合と使わなかった場合とで、どれだけ計算の手間が変わるかを比べてみる。

【例】 $z=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ とするとき、z^3 を求めてみる。

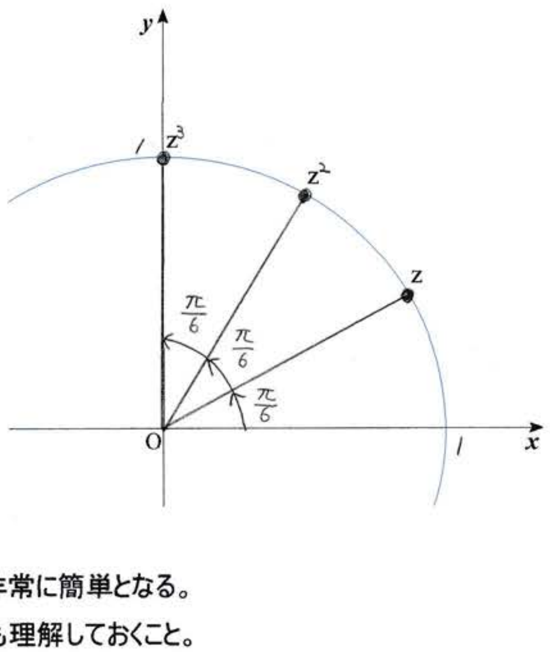
$\boxed{\text{解き方①}}$ ド・モアブルの定理を使わない場合

$z=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ なので、

$$
\begin{aligned}
z^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{1}{4}i^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i+\frac{3}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}i^2 \\
&= i
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{解き方②}}$ ド・モアブルの定理を使う場合

$$
\begin{aligned}
z^3 &= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 \\
&= \cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \\
&= i
\end{aligned}
$$



このように、ド・モアブルの定理を使うと(解き方②)、計算が非常に簡単となる。
また、右図に示す通り、ド・モアブルの定理の図形的な意味も理解しておくこと。

◆練習13（教科書P19）

次の計算をせよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^8$

(2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)^{-12}$

ここで注意することは、ド・モアブルの定理を使うときは、複素数が極形式の状態でないといけないということである。次の練習14では、与えられた複素数をまずは極形式に変形するところから始めること。次の例題3を参考にせよ。

【例題3】（教科書P19）

$\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ を計算せよ。

$\sqrt{3}+i$ を極形式で表すと、$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ である。

よって、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^6&=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6\\&=2^6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6\\&=2^6\left\{\cos\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)\right\}\\&=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)\\&=64\times(-1)\\&=-64\end{aligned}$$

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$ より

ド・モアブルの利用

極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の形に変形した時に、r の値についても累乗の計算をする必要があるので注意すること。（練習13では、r の値が1なので、計算する必要がなかった。）

◆練習１４（教科書Ｐ１９）

次の計算をせよ。

(1) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$

(2) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$

(3) $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$

(4) $\left(1-i\right)^{-8}$

[5]複素数のn乗根(教科書 P20)

方程式　$x^2=1$　の解は、$x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$　である。

(解は2つあることがわかる。このような± 1を、『1の2乗根』といった)

では、$x^3=1$　や　$x^4=1$　などを満たすx(1の3乗根や4乗根)はどのようにして求めればいいのか？

今までに学んできた『極形式』や『ド・モアブルの定理』を用いることによって、これを計算することができる。

次の例8で、その解き方を確認しよう。

【例8】(教科書 P20)

方程式　$z^3=1$　の解である1の3乗根を求めてみよう。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$・・・①とおき、与式$z^3=1$の両辺を極形式に変形すると、

(左辺) $z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$　・・・ド・モアブルの定理より

(右辺) $1=\cos 0+i\sin 0$

この2つの式が等しいので、

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos 0+i\sin 0$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると、

$$\begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta=0+2k\pi \quad (k\text{は整数}) \end{cases}$$

・・・なぜこうなるかは、本課題のP2を参照

これを解くと、

$$\begin{cases} r=1 \quad (r\text{は絶対値であり、正の実数なので}) \\ \theta=\dfrac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

θについて、$0\leqq\theta<2\pi$　の範囲で考えればいいので、そのときkの値は$k=0,1,2$となる。

$k=0,1,2$のときのzを、それぞれz_0, z_1, z_2　とすると、rとθの値を①式に代入し

$$z_0=1\times\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\times 0\times\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\times 0\times\pi\right)\right\}$$
$$=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$z_1=1\times\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\times 1\times\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\times 1\times\pi\right)\right\}$$
$$=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$k=0$のとき
$\theta=\frac{2}{3}\cdot 0\cdot\pi=0$
$k=1$のとき
$\theta=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\pi=\frac{2}{3}\pi$
$k=2$のとき
$\theta=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\pi=\frac{4}{3}\pi$
$k=3$のとき
$\theta=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\pi=2\pi$・・・0と同じ
$k=4$のとき
$\theta=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\pi=\frac{8}{3}\pi$・・・$\frac{2}{3}\pi$と同じ
⋮
だから、$k=0,1,2$だけ考えればいい！

$$z_2 = 1\times\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\times 2\times\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\times 2\times\pi\right)\right\}$$
$$=\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

以上より、方程式　$z^3=1$　の解である1の3乗根は、

$z=1,\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　の3つであることがわかる。

これらを3乗してみてください。それぞれ 1 に戻るのがわかるはずです。
また、$k=3,4,5$・・・などについては、$k=0,1,2$ と同じになるので、計算する必要はありません。

◆練習15（教科書 P21）

方程式　$z^6=1$　を解き、1の6乗根を求めよ。また、求めた値を表す点を複素数平面上に図示せよ
※図示の仕方については、教科書 P20 の図を参考にすること。