数学Ⅲ　課題①

2020 年 4 月 17 日発行

すべてのページを重ねて、この表紙の左側の黒線部をホッチキスで留めて提出すること。

解　答　例

3年＿＿＿＿組＿＿＿＿番/名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

【説明】

数学Ⅲの初めの単元は「複素数平面」です。
これは、数学Ⅱで学んだ「複素数」を使うことになります。ですので、この課題では、まず数学Ⅱの「複素数」の復習を行い、続いて数学Ⅲの「複素数平面」の予習を行います。
基本的には、数学Ⅱ・数学Ⅲの教科書やノートを参考にしてください。(ない場合は、インターネットを活用すること)数学Ⅲの範囲については、教科書の該当ページを表示しています。
もし、答えに自信がない場合は、ワークの該当する問題を解いて答え合わせをしてから取り組むのもいいでしょう。

調べもの学習と書いてある部分に関しては、授業や教科書で取り扱っていないものもあるので、その場合は参考書やインターネットを利用してください。
もし、よくわからない点があれば、横江まで問い合わせてください。

【数学Ⅱの復習】

[1]複素数の基本

①次の空欄に記入せよ

$i^2 =$ -1　　$\sqrt{-1} =$ i　　$a>0$のとき、$\sqrt{-a} =$ $\sqrt{a}\,i$

②このような『i』のことを、虚数単位という。

③「実数」と「虚数」を合わせて「複素数」という。では、「実数」と「虚数」について思いつく数字をなるべく多く、次の空欄に記入せよ。

【複素数】	
【実数】…iがついてない	【虚数】…iがついている
0, 1, -5, 100, 3.2, $\frac{3}{4}$, π, $\sqrt{5}$, $-4.3\dot{8}$ など	i, $-i$, $-3i$, $5i$ ← 純虚数 ※実部のないもの $4+2i$, $2-7i$ など

④次の計算をせよ。

(1) $(4+3i)+(3-5i) =$ $7-2i$ //

(2) $(1-2i)-(2-3i) =$ $1-2i-2+3i = -1+i$ //

(3) $(2+i)(4-5i) = 2\cdot 4 + 2\cdot(-5i) + i\cdot 4 + i\cdot(-5i) = 8 - 10i + 4i + 5 = 13 - 6i$ //

(4) $(3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9 + 1 = 10$ //

⑤次の複素数と共役な複素数を求めよ。

(1) $4+3i$　　$4-3i$

(2) $5-2i$　　$5+2i$

(3) $2i+7$　　$-2i+7$

(4) $-8i$　　$8i$

(5) 5　　5

※ $5-2i = 5+2i$ のように
イコールをつけてはいけない

⑥次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{3+i} = \dfrac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i}{10}$ // $\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i\right)$

(2) $\dfrac{i}{2+3i} = \dfrac{i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{3+2i}{13}$ // $\left(\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i\right)$

(3) $\dfrac{1+2i}{1-2i} = \dfrac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{1+2i+2i-4}{1+4} = \dfrac{-3+4i}{5}$ // $\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)$

[2]2次方程式の解

①次の2次方程式を解け。(解は複素数の範囲で答えよ。)

(1) $x^2+3x+5=0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2} \quad //$$

$\left(-\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right)$

※ $\sqrt{11i}$ としない
$\sqrt{-11}$ のままはダメ

(2) $2x^2+x+3=0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}\,i}{2} \quad //$$

$\left(-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{2}i\right)$

(3) $3x^2-2x+5=0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{14}\,i}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{14}\,i}{3} \quad //$$

$\left(\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}i\right)$

②2次方程式の解の種類は、判別式 $D=b^2-4ac$ を用いて調べることができた。
　判別式について、次の表の空欄に記入せよ。

判別式の値	「実数」の範囲のとき	「複素数」の範囲のとき
$D>0$ のとき	異なる2つの実数解を持つ	異なる2つの実数解を持つ
$D=0$ のとき	重解を持つ	重解を持つ
$D<0$ のとき	解を持たない	異なる2つの虚数解をもつ

調べもの学習

虚数（i）とは、世の中に存在しない数字（i maginary number：想像上の数）である。
では、昔の人はなぜこのような数字を生み出したのでしょうか？その理由を調べて記入せよ。

例

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で求められる。しかし、根号（$\sqrt{\ }$）の中が負になるときは「解なし」としていた。

「2乗して負になる数」などありえないからだ。

しかし、これを数として認めることで、全ての2次方程式で解を求めることができるようになった。

※すると、この虚数 i は世の中の様々なことに利用できることがわかった。（量子力学；量子コンピューターの基、宇宙のはじまりの説明、など）

それは、どのような内容かも調べてみよう。

【数学Ⅲの予習】

[1]複素数と複素数平面

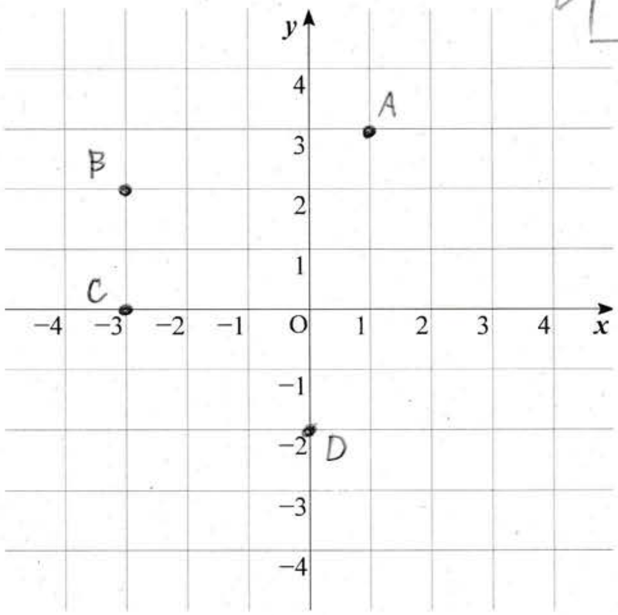
虚数とは、世の中に存在しない（想像上の）数字であり、実数に比べてイメージがしづらい。そこで、この虚数（ならびに複素数）をわかりやすく図で表示したものが『複素数平面』である。

◆練習1（教科書 P6）

・点をはっきりうつ
・点の名前を書く

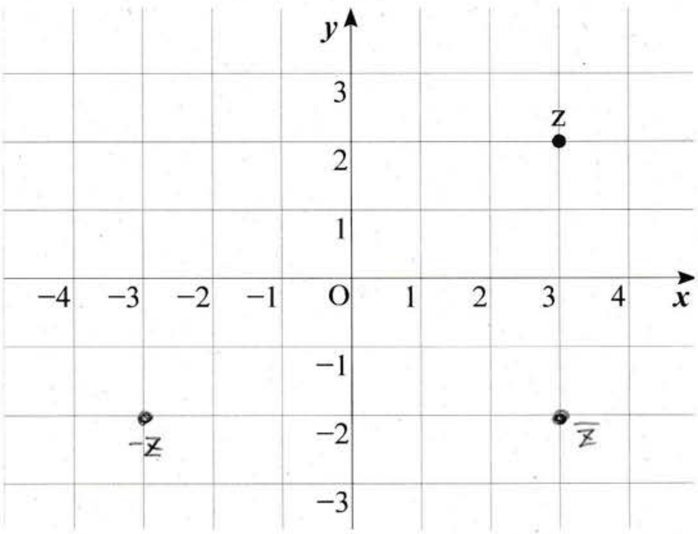
次の複素数を表す点を、例1を参考に下の座標平面に記入せよ。

(1) $A(1+3i)$
(2) $B(-3+2i)$
(3) $C(-3)$
(4) $D(-2i)$



[2]共役な複素数

共役な複素数を複素数平面上で表示すると、ある位置関係がある。次の複素数 $z=3+2i$ に対して、$\overline{z}$ 、$-z$ の位置を複素数平面上に記入せよ。（教科書 P7）



実軸対象…… $\overline{z}$ のこと
原点対象…… $-z$ のこと

◆練習２（教科書 P7）

複素数平面上で、次の点 z と実軸に関して対称な点、および原点に関して対称な点を表す複素数を、それぞれ求めよ。

(1) $z=2+i$　実軸対称 $2-i$　原点 〃 $-2-i$

(2) $z=-3+2i$　実軸対称 $-3-2i$　原点 〃 $3-2i$

(3) $z=-4-3i$　実軸対称 $-4+3i$　原点 〃 $4+3i$

(4) $z=5-4i$　実軸対称 $5+4i$　原点 〃 $-5+4i$

◆練習３（教科書 P7）

$\alpha=3+2i$、$\beta=2-i$ のとき、『共役な複素数の性質』①～④が成り立つことを、次の（例）を参考に確かめよ。

（例）①について　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{(3+2i)+(2-i)}=\overline{5+i}=5-i$

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(\overline{3+2i})+(\overline{2-i})=(3-2i)+(2+i)=5-i$$

右辺と左辺を別々に計算して、その答えが一致すればよい。

よって、$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ である。

②について　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{(3+2i)-(2-i)}=\overline{1+3i}=1-3i$

$$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(\overline{3+2i})-(\overline{2-i})=(3-2i)-(2+i)=1-3i$$

よって $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ である。

③について　$\overline{(3+2i)(2-i)}=\overline{6-3i+4i-2i^2}=\overline{8+i}=8-i$

$$\overline{(3+2i)}\cdot\overline{(2-i)}=(3-2i)(2+i)=6+3i-4i-2i^2=8-i$$

よって $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ である。

④について　$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\overline{\left(\frac{3+2i}{2-i}\right)}=\overline{\left\{\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right\}}=\overline{\left(\frac{4+7i}{5}\right)}=\frac{4-7i}{5}$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\frac{\overline{(3+2i)}}{\overline{(2-i)}}=\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-7i}{5}$$

よって $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ である。

[3]複素数の絶対値

◆練習4（教科書 P8）

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $1+2i$

$|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ //

(2) $-4+3i$

$|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ //

(3) $5-i$

$|5-i|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$ //

(4) $-3i$

$|-3i|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$ //

(5) 7

$|7|=7$ //　※ $|7|=\sqrt{7^2+0^2}=7$ //

公式 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

『複素数の絶対値の性質』を利用して、複素数 $z=2+3i$ に対して、次の値をそれぞれ求めよ。（教科書 P8）

性質
$$\begin{cases} |z|=|\bar{z}|=|-z| \\ z\bar{z}=|z|^2 \end{cases}$$

$|z|=|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ //

$|\bar{z}|=|z|=\sqrt{13}$ //

$|-z|=|z|=\sqrt{13}$ //

$z\bar{z}=|z|^2=(\sqrt{13})^2=13$ //

[4]複素数の実数倍

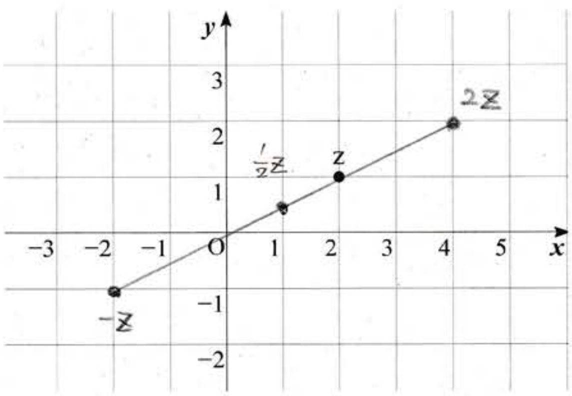
◆練習5（教科書 P9）

右の図の点 z に対して、次の点を図示せよ。

(1) $2z$

(2) $-z$

(3) $\frac{1}{2}z$

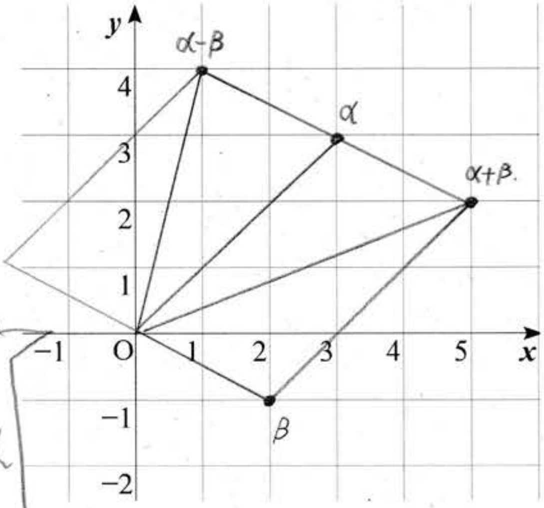


[5]複素数の和と差

ある2つの複素数の『和』や『差』を表す点を、複素数平面上で『図』として考えてみる。

◆練習6（教科書 P10）

$\alpha = 3+3i$、$\beta = 2-i$ のとき、点 α、点 β、点 $\alpha+\beta$、点 $\alpha-\beta$ を右の複素数底面上に図示せよ。



考え方

点βは右に2，下に1進んだ点なので

点α+βは点αから右に2下に1進んだ点である

⇒練習6の結果より、複素数の和や差は、点を平行に移動さることがわかる。

調べもの学習

さて、ここまでで学んできた[3]複素数の絶対値、[4]複素数の実数倍、[5]複素数の和と差の内容について、皆さんはすでに似た内容を学び終えています。それはどのような内容（単元）だったのか調べてみよう。（〇〇〇の絶対値、〇〇〇の実数倍、〇〇〇の和と差、これらの〇〇〇に当てはまるもの）また、練習4～6について、〇〇〇の内容に置き換えた問題を探し、それを解いてみよう。（問題文と答えを記入せよ）　例「ベクトル」と似ている。

◎ベクトルの絶対値

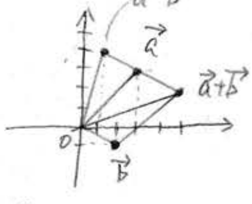
$\vec{a}=(a_1, a_2)$ のとき $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

（問）$\vec{a}=(3,2)$ の大きさは？（解）$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ //

◎ベクトルの和と差

（問）$\vec{a}=(3,3)$，$\vec{b}=(2,-1)$ のとき

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



◎ベクトルの実数倍

（問）図のベクトル $\vec{a}$ に対して

$2\vec{a}$，$-\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$ を図示せよ。